Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Srbija
http://www.pmf.ni.ac.rs/mii
Matematika i informatika 3 (1) (2015), 51-64

Nestandardni načini za sumiranje nekih redova

Mihailo Krstić
student matematike, PMF Univerziteta u Nišu
E-mail: mihailo1994@yahoo.com

1 Uvod i neki osnovni pojmovi

U ovom članku bavićemo se izračunavanjima nekih beskonačnih suma, koje su između ostalog jedne od bitnijih u matematici. Standardna rešenja problema kojima ćemo se baviti zahtevaju dobro poznavanje složenog matematičkog aparata, pa bi takav pristup ovim problemima izgledao preglomazan. Težićemo tome da rešenja budu što je moguće elementarnija i zanimljiva a pritom pazeći na matematičku strogost izlaganja. Pod elementarnim rešenjem problema podrazumevamo ono rešenje problema za čije rešavanje je potreban matematički aparat ne veći od onog koji je potreban za shvatanje postavke problema.

Videćemo i vezu između nekih redova i nekih problema u Teoriji verovatnoća, kao i zašto sa pravom možemo reći da je skup prostih brojeva "gradivni element", u pravom smislu reči, skupa prirodnih brojeva.

Definicija 1. ***Beskonačnu sumu*** *$a_1+a_2+...+a_n+...$ realnih brojeva nazivamo* ***red****. Koristimo oznaku*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Zbir $S_n = a_1 + ... + a_n$ nazivamo ***n-ta parcijalna suma*** *reda a red*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

naziva se ***ostatak*** *ili* ***rep*** *reda.*

Definicija 2. *Red* ***konvergira*** *ako konvergira niz parcijalnih suma i ta vrednost naziva se* ***suma reda****. U suprotnom kažemo da red* ***divergira****.*

Teorema 1. *Ako je red kovergentan tada ostatak reda teži nuli kada n teži beskonačnosti.*

U nastavku ćemo se baviti samo redovima sa nenegativnim članovima.

Definicija 3. *Tačka $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty, +\infty\}$ je* ***tačka nagomilavanja*** *niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realnih brojeva ako se u proizvoljnoj okolini te tačke nalazi beskonačno mnogo članova niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Definicija 4. ***Najveća tačka nagomilavanja*** *niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ realnih brojeva naziva se* ***limes superior*** *niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i označava se sa $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$.*

Definicija 5. ***Najmanja tačka nagomilavanja*** *niza* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *realnih brojeva naziva se* ***limes inferior*** *niza* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i označava se sa* $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Primetimo da limes superior i limes inferior niza uvek postoje dok granična vrednost niza ne mora uvek postojati.

Teorema 2. *Neka za niz* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *realnih brojeva važi*

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}.$$

Tada je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergentan i važi*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a.$$

Jasno je da uvek važi $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Teorema 3. *Ako monotoni niz realnih brojeva ima konvergentan(divergentan) podniz tada je i sam konvergentan(divergentan). U slučaju konvergencije, konvergira ka istoj granici kao i podniz.*

Teorema 4. ***(O dva policajca)***
Neka za realne nizove $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *za svako* $n \in \mathbb{N}$ *važi*

$$L_n \leq S_n \leq D_n$$

i

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} D_n = c \in \mathbb{R}.$$

Tada je i

$$\lim_{n\to\infty} S_n = c.$$

Definicija 6. ***Beskonačan proizvod*** $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n \cdot ...$ *pozitivnih brojeva u oznaci*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$$

kažemo da ***konvergira*** *ako red*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln a_k$$

konvergira.

Teorema 5. ***(Osnovna teorema aritmetike)*** *Svaki prirodnan broj* $n > 1$ *može se na jednistven način prikazati kao*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k},$$

gde je $k \in \mathbb{N}$ *i* $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *a brojevi* $p_1, ..., p_k$ *su prosti i različiti.*

Definicija 7. *Funkcija* $\pi : (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{N}$ *daje broj prostih brojeva u intervalu* $(1, x], \quad x > 1$.

2 Konvergencija i sumiranje

Posmatrajmo red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$$

za neko realno x. Za one vrednosti x za koje taj red konvergira, možemo uspostaviti neko pravilo po kome ćemo svakom x dodeliti sumu odgovarajućeg reda. Vrednosti x za koje pomenuti red konvergira daje sledeće tvrđenje.

Teorema 6. *Red*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$$

kovergira za $x > 1$ *a divergira za* $x \leq 1$.

Dokaz. Neka je najpre $x > 1$. Tada za $k = 2, 3, ...$ važi da niz

$$S_k = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + ... + \frac{1}{k^x}$$

parcijalnih suma konvergira. Zaista,

$$S_{2^k-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}\right) + \left(\frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x}\right) + \left(\frac{1}{8^x} + ... + \frac{1}{15^x}\right) + ...+$$

$$+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^x} + \frac{1}{(2^{k-1})^x + 1} + ... + \frac{1}{(2^k-1)^x}\right) \leq 1+2\frac{1}{2^x}+2^2\frac{1}{4^x}+...+2^{k-1}\frac{1}{(2^{k-1})^x}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{x-1}} + ... + \frac{1}{(2^{k-1})^{x-1}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{x-1}}} = \frac{2^{x-1}}{2^{x-1} - 1}.$$

Odavde dobijmo da je

$$S_{2^k-1} < \frac{2^{x-1}}{2^{x-1} - 1},$$

pa prema tome našli smo podniz niza delimičnih suma koji je rastući i ograničen odozgo pa samim tim i konvergentan, odakle sledi i konvergencija niza parcijalnih suma pa i samog reda.
Neka je sada $x \leq 1$. Tada iz $k^x \leq k$ dobijamo da je $\frac{1}{k^x} \geq \frac{1}{k}$, pa imamo da je

$$S_{2^k-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x}\right) + \left(\frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \frac{1}{7^x}\right) + \left(\frac{1}{8^x} + ... + \frac{1}{15^x}\right) + ...+$$

$$+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^x} + \frac{1}{(2^{k-1})^x + 1} + ... + \frac{1}{(2^k-1)^x}\right)$$

$$\geq 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + ... + \frac{1}{15}\right) + ...+$$

$$+\left(\frac{1}{(2^{k-1})} + \frac{1}{(2^{k-1}) + 1} + ... + \frac{1}{(2^k-1)}\right) \geq 1+2\frac{1}{4}+2^2\frac{1}{8}+...+2^{k-1}\frac{1}{2^k} = \frac{k+1}{2}.$$

Dakle, dobili smo da je

$$S_{2^k-1} \geq \frac{1}{2}(1+k), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

i kako je niz $\left(\frac{k+1}{2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ neograničen odozgo, sledi da niz parcijalnih suma ima podniz koji divergira pa onda i sam niz parcjalnih suma divergira, odakle sledi tvrđenje teoreme. $\square$

Red za $x = 1$ naziva se **harmonijski** red. Naziv ovog reda potiče od činjenice da su njegovi članovi, počev od drugog, talasne dužine harmonika vibrirajuće žice muzičkih instrumenata. Takođe, počev od drugog člana, svaki član reda je harmonijska sredina susednih članova. Za $x > 1$ ovaj red se naziva **hiperharmonijski**. Činjenica da divergira za $x = 1$ je bila poznata još Ojleru[1] koji je proučavao kovergenciju za relane brojeve ali je tek Riman[2] posmatrao red za kompleksne argumente. Napomenimo da je na taj način, pod izvesnim uslovima, definisana **Rimanova Zeta funkcija**. U ovom članku će biti izračunate neke vrednosti te funkcije na zanimljiv i dosta nestandardan način.

Napomenimo još samo da je za Rimanovu Zeta funkciju vezan i jedan od najtežih matematičkih problema koji privlači matematičare još od 1859. godine kada ga je formulisao Riman u jednom svom radu koji se bavio pitanjem broja prostih brojeva ispod zadate granice.

Taj problem se naziva **Rimanova hipoteza** i tvrdi da sve netrivijalne nule Rimanove Zeta funkcije imaju realan deo jednak $1/2$.

Do sada je za više od 15 milijardi nula Rimanove Zeta funkcije provereno (naravno uz korišćenje moćnih računara) da se nalaze na pravoj $\mathrm{Re}(z) = 1/2$ u kompleksnoj ravni.

Veliki broj značajnih matematičara današnjice je dalo dokaz ovog tvrđenja u kojima je nađena greška.

Rimanova hipoteza je na listi od sedam **Milenijumskih problema** koje je sastavio matematički institut Klej (Clay Mathematics Institute of Cambridge, Massachusetts-CMI). Za rešavanje ovih problema je ponuđena nagrada od milion dolara.

Prethodna teorema nam daje pravo da damo sledeću definiciju.

Definicija 8. *Funkcija* $\zeta : (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definisana sa*

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$$

naziva se ***realna Rimanova Zeta funkcija.***

Sada ćemo izračunati vrednost $\zeta(2)$.

Teorema 7.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

[1] Leonhard Euler (1707-1783), švajcarski matematičar

[2] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), nemački matematičar

Dokaz. Neka je $0 < x < \frac{\pi}{2}$ proizvoljno. Tada iz

$$0 < \sin(x) < x < \operatorname{tg}(x) < +\infty$$

imamo da važi

$$0 < \frac{1}{\operatorname{tg}^2(x)} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2(x)} < +\infty.$$

Podelimo interval $(0, \frac{\pi}{2})$ na $2^n, n \in \mathbb{N}$ jednakih delova i označimo podeone tačke $x_k = \frac{\pi}{2}\frac{k}{2^n}, k = 1, ..., 2^n - 1$. Tada imamo da je

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2(x_k)} < \frac{1}{x_k^2} < \frac{1}{\sin^2(x_k)},$$

pa sumiranjem dobijamo da je

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\operatorname{tg}^2(x_k)} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{x_k^2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2(x_k)}.$$

Odavde elementarnim transformacijama trigonometrijskih funkcija dobijamo

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \left(\frac{1}{\sin^2(x_k)} - 1 \right) < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{x_k^2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2(x_k)},$$

što je ekvivalnetno sa

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \left(\frac{1}{\sin^2(x_k)} \right) - (2^n - 1) < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{x_k^2} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2(x_k)}.$$

Definišimo niz $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa

$$L_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2(x_k)}.$$

Ovaj niz ćemo izračunati rekurentno. Primetimo najpre da važi jednostavna relacija

$$\frac{1}{\sin^2(x)} + \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{4}{\sin^2(2x)}, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Kako su podeone tačke simetrične u odnosu na tačku $x_{2^{n-1}}$ dobijamo da je

$$\frac{1}{\sin^2(x_k)} + \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - x_k)} = \frac{1}{\sin^2(x_k)} + \frac{1}{\cos^2(x_k)} = \frac{4}{\sin^2(2x_k)}, \quad k \in \{1, ..., 2^n - 1\}.$$

Odavde, sumiranjem od indeksa 1 do indeksa $2^{n-1} - 1$ tj. do tačke koja je prva pre središnje tačke intervala i koristeći da su tačke $2x_k$ tačke iz prethodne podele, dobijamo rekurentnu relaciju

$$L_n = 4L_{n-1} + 2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

gde je sabirak 2 dobijen jer nije računata središnja tačka $x_{2^{n-1}}$.

Vrednost L_1 dobijamo trivijalno kao $L_1 = \frac{1}{\sin^2(\frac{\pi}{4})} = 2$. Niz $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nalazimo sukcesivnom zamenom unazad na sledeći način:

$$L_n = 4L_{n-1} + 2 = 4(4L_{n-2} + 2) + 2 =$$

$$4^2 L_{n-2} + 4 \cdot 2 + 2$$

$$= 4^2(4L_{n-3} + 2) + 4 \cdot 2 + 2 = ... = 4^{n-1}L_1 + 4^{n-2} \cdot 2 + ...4^2 \cdot 2 + 4^1 \cdot 2 + 2$$

$$...$$

$$= ... = 4^{n-1}L_1 + 2(4^{n-2} + ... + 4^2 + 4^1 + 1) = 2\frac{4^n - 1}{4 - 1} = \frac{2}{3}(4^n - 1).$$

Dakle, imamo da važi

$$L_n = \frac{2}{3}(4^n - 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sada smo dobili da je

$$L_n - (2^n - 1) < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\frac{k}{2^n}\right)^2} < L_n$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{2}{3}(4^n - 1) - (2^n - 1) < \frac{4^{n+1}}{\pi^2} \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} < \frac{2}{3}(4^n - 1)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\pi^2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{4^{n+1}}\right) < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} < \pi^2\left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3 \cdot 4^{n+1}}\right).$$

Odavde po teoremi o dva policajca dobijamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Kako je niz parcijalnih suma reda

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

rastući niz pozitivnih brojeva a ovo jedan njegov konvergentan podniz sledi da i niz parcijalnih suma konvergira ka istoj graničnoj vrednosti tj.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

□

Dakle sada znamo da je $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Analognim postupkom, uz malo više računa možemo naći i vrednost $\zeta(4)$. Preciznije, važi sledeća teorema.

Teorema 8.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Dokaz. Kao i u predhodnoj teoremi, podelimo interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ na $2^n, n \in \mathbb{N}$ jednakih delova tako što ćemo definisati podeone tačke

$$x_k = \frac{\pi}{2} \frac{k}{2^n}, \quad \forall k \in \{1, ..., 2^n - 1\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sada imamo da za svako $k \in \{1, ..., 2^n - 1\}$ i svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$0 < \frac{1}{\mathrm{tg}^4(x_k)} < \frac{1}{x_k^4} < \frac{1}{\sin^4(x_k)} < +\infty.$$

Poslednja jednakost, nakon elementarnih transformacija, je ekvivalentna sa

$$\frac{1}{\sin^4(x_k)} - \frac{2}{\sin^2(x_k)} + 1 < \frac{1}{x_k^4} < \frac{1}{\sin^4(x_k)}.$$

Sada, sumiranjem od indeksa 1 do indeksa $2^n - 1$ dobijamo da je

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^4(x_k)} - 2 \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2(x_k)} + (2^n - 1) < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^4} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^4(x_k)}.$$

Definišimo nizove $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa

$$L_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^2(x_k)}, \quad D_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^4(x_k)}.$$

Sada se predhodna nejednakost svodi na

$$\frac{\pi^4}{2^{4(n+1)}} \left(D_n - 2L_n + 2^n - 1\right) < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^4} < \frac{\pi^4}{2^{4(n+1)}} D_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dalje, za svako $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ važi da je

$$\frac{1}{\sin^4(x)} + \frac{1}{\cos^4(x)} = \frac{16}{\sin^4(2x)} - \frac{8}{\sin^2(2x)}.$$

Odavde, sumiranjem od indeksa 1 do indeksa $2^{n-1} - 1$ i dodavanjem vrednosti sa kojom učestvuje središnja tačka, dobijamo uz korišćenje vrednosti niza $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz prethodne teoreme da je

$$D_{n+1} = 16D_n - \frac{16}{3}(4^n - 1) + 4, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

i

$$D_1 = 4.$$

Pritom smo koristili i da su tačke $2x_k$ tačke iz prethodne podele. Niz $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kao u prethodnoj teoremi dobijamo sukcesivnom zamenom unazad. Dakle,

$$D_n = \frac{4}{45}(2^{4n+1} + 5 \cdot 4^n - 7), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Odavde dobijamo da je

$$\frac{4\pi^4}{45}\left(\frac{1}{8} + \frac{3}{2^{2n+3}} - \frac{6}{2^{4n+4}} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2n+2}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{4n+2}}\right) < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

i

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^4} < \frac{4\pi^4}{45}\left(\frac{1}{8} + \frac{5}{2^{2n+4}} - \frac{7}{2^{4n+4}}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kako niz na levoj strani teži ka $\frac{\pi^4}{90}$ kada n teži beskonačnosti kao i niz da desnoj strani, po teoremi o dva policajca zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^2}{90}.$$

Kako je niz parcijalnih suma reda

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$$

rastući niz pozitivnih brojeva a ovo jedan njegov konvergentan podniz sledi da i niz parcijalnih suma konvergira ka istoj graničnoj vrednosti tj.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

□

U nastavku ćemo izračunati $\zeta(6)$.

Teorema 9.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Dokaz. Dokaz sprovodimo analogno. Podelimo interval $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ na $2^n, n \in \mathbb{N}$ jednakih delova i definišimo podeone tačke

$$x_k = \frac{\pi}{2}\frac{k}{2^n}, \quad \forall k \in \{1, ..., 2^n - 1\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sada imamo da za svako $k \in \{1, ..., 2^n - 1\}$ i svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$0 < \frac{1}{\operatorname{tg}^6(x_k)} < \frac{1}{x_k^6} < \frac{1}{\sin^6(x_k)} < +\infty.$$

Poslednja jednakost, nakon elementarnih transformacija, je ekvivalentna sa

$$\frac{1}{\sin^6(x_k)} - \frac{3}{\sin^4(x_k)} + \frac{3}{\sin^2(x_k)} - 1 < \frac{1}{x_k^6} < \frac{1}{\sin^6(x_k)}.$$

Sada, sumiranjem od indeksa 1 do indeksa $2^n - 1$ dobijamo da je

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^6(x_k)} - \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{3}{\sin^4(x_k)} + \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{3}{\sin^2(x_k)} - (2^n - 1) < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{x_k^6} < \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^6(x_k)}.$$

Prostim sređivanjem dobijamo da važi i

$$\frac{1}{\sin^6(x)} + \frac{1}{\cos^6(x)} = \frac{64}{\sin^6(2x)} - \frac{48}{\sin^4(2x)}, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Definišimo niz $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa

$$F_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{\sin^6(x_k)}.$$

Odavde, sumiranjem od indeksa 1 do indeksa $2^{n-1} - 1$ i dodavanjem vrednsti sa kojom učestvuje središnja tačka, dobijamo uz korišćenje vrednosti niza $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz prethodne teoreme da je

$$F_{n+1} = 8 + 64F_n - \frac{64}{15}\left(2^{4n+1} + 5 \cdot 4^n - 7\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

i

$$F_1 = 8.$$

Analogno kao u prethodnim teoremama, sukcesivnom zamenom unazad, dobijamo uz malo više računa niz $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, eksplicitno odredjen sa

$$F_n = \frac{8}{945}\left(21 \cdot 2^{2n+1} + 8^{2n+1} + 21 \cdot 16^n - 71\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Odavde, analogno kao i u prethodnim teoremama, korišćenjem izračunatih nizova $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz prethodne teoreme, posle sređivanja izraza i primenom teoreme o dva policajca, dobijamo da je

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

$\square$

Izračunavanje većih vrednosti Rimanove Zeta funkcije izloženim algoritmom se znatno komplikuje.
Može se dokazati da važe sledeći rezultati:

$$\zeta(8)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^8}=\frac{\pi^8}{9450}=1.00407... \quad ,$$

$$\zeta(10)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{10}}=\frac{\pi^{10}}{93555}=1.000994... \quad ,$$

$$\zeta(12)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{12}}=\frac{691\pi^{12}}{638512875}=1.000246... \quad ,$$

$$\zeta(14)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{14}}=\frac{2\pi^{14}}{18243225}=1.0000612... \quad .$$

Postavimo zato sledeći, naizgled nevezan problem sa datom tematikom.

Zadatak 1. ***(Modifikovani problem Čebiševa[3])***
Na slučajan način se biraju dva prirodna broja a i b iz skupa $\{1,...,n\}, n\in\mathbb{N}$. *Koja je verovatnoća da su oni uzajamno prosti?*

Rešenje. Koristićemo se činjenicom da su dva prirodna broja uzajamno prosta ako i samo ne postoji prost broj koji deli oba broja istovremeno. Neka je $m(n)$ najveći prost broj iz skupa $\{1,...,n\}$ i neka su A_2,...,$A_{m(n)}$ redom događaji da su dva slučajno izabrana broja iz ovog skupa deljiva redom sa $2,3,5,...,m(n)$. Tada imamo da je tražena verovatnoća q_n jednaka

$$P\left(A_2^C\cdot ...\cdot A_{m(n)}^C\right)=P\left(A_2^C\right)\cdots P\left(A_{m(n)}^C\right)=(1-P(A_2))\cdots\left(1-P(A_{m(n)})\right).$$

Sada, iz nezavisnosti izbora brojeva, koristeći činjenicu da u skupu $\{1,2,...,n\}$ brojeva deljivih sa $i\in\{2,3,5,...,m(n)\}$ ima $[\frac{n}{i}]$ dobijamo da je

$$P(A_i)=\frac{[\frac{n}{i}]}{n}\cdot\frac{[\frac{n}{i}]}{n}=\left(\frac{[\frac{n}{i}]}{n}\right)^2,\quad \forall i\in\{2,3,5,...,m(n)\}.$$

Tražena verovatnoća je

$$q_n=\prod_{i\in\{2,3,5,...,m(n)\}}\left(1-\left(\frac{[\frac{n}{i}]}{n}\right)^2\right).\triangle$$

Vezu između dosadašnje priče i prethodnog zadatka daje sledeća teorema.

Teorema 10.

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^x},$$

gde je $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *niz prostih brojeva i* $x>1$.

[3]Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894), ruski matematičar

Dokaz. Iz poznatog razvoja imamo da važi

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}} = \frac{1}{p_k^x} + \frac{1}{(p_k^2)^x} + ... + \frac{1}{(p_k^m)^x} + ... \quad .$$

Označimo sa $P_x^{(N)}$ proizvod konačnog broja takvih redova, koji odgovaraju svim prostim brojevima koji ne prelaze $N \in \mathbb{N}$. Tada je

$$P_x^{(N)} = \prod_{p_k \leq N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}}.$$

Kako su ovo redovi sa nenegativnim članovima tada je njihov proizvod $P_x^{(N)}$ konvergentan red čija je suma jednaka proizvodu suma svakog reda pojedinačno. Kombinujući proste brojeve $p_k \leq N$, međusobnim množenjem ovih redova, koristeći osnovnu teoremu aritmetike, dobijamo u imeniocima sve prirodne brojeve $k \leq N$ stepenovane sa x i još neke koji su veći od N. Preciznije, imamo da je

$$P_x^{(N)} = \prod_{p_k \leq N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x} + \sum_{\substack{k=N+1 \\ k=p_1^{\alpha_1}\cdots p_N^{\alpha_N} \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_N \in \mathbb{N}\cup\{0\}}}^{+\infty} \frac{1}{k^x}.$$

Sada imamo da je

$$\left| P_x^{(N)} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x} \right| < \sum_{\substack{k=N+1 \\ k=p_1^{\alpha_1}\cdots p_N^{\alpha_N} \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_N \in \mathbb{N}\cup\{0\}}}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}.$$

Kako je red $\sum \frac{1}{k^x}$ konvergentan, ostatak tog reda teži nuli kada $N \to +\infty$, prelaskom na graničnu vrednost u prethodnoj nejednakosti kada $N \to +\infty$ dobijamo traženu jednakost. $\square$

Posledica 1. *Za niz prostih brojeva* $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *važi*

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}.$$

Dokaz. Uprethodnoj teoremi stavimo $x = 2$. Tada po prethodno izloženom imamo da je

$$\left(\prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^2}}\right)\right)^{-1} = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Iz jednakosti

$$\left(\prod_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^2}}\right)\right)^{-1} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^2}\right)$$

sledi tvrđenje. $\square$

Posledica 2. *Red*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k},$$

gde je $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *niz prostih brojeva, divergira.*

Dokaz. Stavljajući sada da je $x = 1$ imamo da važi

$$P_1^{(N)} = \prod_{p_k \le N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} > \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Sada imamo da je beskonačan proizvod

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

divergentan i teži ka $+\infty$ kada $N \to +\infty$. Odavde imamo da je

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = 0.$$

Pretpostavimo suprotno, da je red $\sum \frac{1}{p_k}$ konvergentan. Posmatrajmo red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)}{\frac{1}{p_k}} = 1,$$

tada iz pretpostavke da red $\sum \frac{1}{p_k}$ konvergira sledi i konvergencija reda

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

pa po definiciji konvergencije beskonačnog proizvoda imamo da i

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

konvergira, što je kontradikcija. Dakle, važi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty.$$

□

Primetimo da iz prethodne teoreme sledi da prostih brojeva ima beskonačno mnogo. Zaista, ako bi prostih brojeva bilo konačno mnogo, tada bi red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k}$$

konvergirao, jer bi imao samo konačno mnogo članova, što je po prethodno dokazanom netačno.

Nađimo sada asimptotsko ponašanje verovatnoće q_n iz modifikovanog problema Čebiševa kada se n negraničeno uvećava. Za proizvoljno $m \in \mathbb{N}$ važi

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{[\frac{n}{m}]}{n} \leq \frac{1}{m}.$$

Sada, odavde imamo da važi

$$\prod_{i=1}^{\pi(n)} \left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right) \leq \prod_{i \in \{2,3,5,\ldots,m(n)\}} \left(1 - \left(\frac{[\frac{n}{i}]}{n}\right)^2\right) \tag{1}$$

i da važi

$$\prod_{i \in \{2,3,5,\ldots,m(n)\}} \left(1 - \left(\frac{[\frac{n}{i}]}{n}\right)^2\right) \leq \prod_{i \in \{2,3,5,\ldots,m(n)\}} \left(1 - \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n}\right)^2\right) \tag{2}$$

Za proizvoljno fiksirano $l \in \{1, \ldots, n-1\}$ neka je, kao i ranije, $m(l)$ najveći prost broj iz skupa $\{1, \ldots, l\}$. Tada možemo izvršiti procenu

$$\prod_{i \in \{2,3,5,\ldots,m(n)\}} \left(1 - \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n}\right)^2\right) \leq \prod_{i \in \{2,3,5,\ldots,m(l)\}} \left(1 - \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n}\right)^2\right). \tag{3}$$

Iz (1) i posledice 1. dobijamo

$$\frac{1}{\zeta(2)} \leq \liminf_{n \to +\infty} \left(\prod_{i \in \{2,3,5,\ldots,m(n)\}} \left(1 - \left(\frac{[\frac{n}{i}]}{n}\right)^2\right)\right) \leq$$

$$\leq \limsup_{n \to +\infty} \left(\prod_{i \in \{2,3,5,\ldots,m(n)\}} \left(1 - \left(\frac{[\frac{n}{i}]}{n}\right)^2\right)\right).$$

Iz (2) i (3) dobijamo

$$\limsup_{n \to +\infty} \left(\prod_{i \in \{2,3,5,\ldots,m(n)\}} \left(1 - \left(\frac{[\frac{n}{i}]}{n}\right)^2\right)\right) \leq \prod_{i=1}^{\pi(l)} \left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right).$$

Prelaskom na graničnu vrednost kada l teži beskonačnosti dobijamo, koristeći posledicu 1. i teoremu o dva policajca, da je

$$\frac{1}{\zeta(2)} = \liminf_{n\to+\infty}\left(\prod_{i\in\{2,3,5,\ldots,m(n)\}}\left(1-\left(\frac{[\frac{n}{i}]}{n}\right)^2\right)\right) =$$

$$= \limsup_{n\to+\infty}\left(\prod_{i\in\{2,3,5,\ldots,m(n)\}}\left(1-\left(\frac{[\frac{n}{i}]}{n}\right)^2\right)\right).$$

Odavde po teoremi 2. imamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} q_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{i\in\{2,3,5,\ldots,m(n)\}}\left(1-\left(\frac{[\frac{n}{i}]}{n}\right)^2\right)\right) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Problem iz zadatka smo nazvali modifikovani problem Čebiševa jer je originalni problem bio: "Odrediti verovatnoću da nasumično izvučena dva prirodna broja iz skupa $\mathbb{N}$ budu uzajamno prosta."

Problem izgleda jasno i precizno postavljen. Ali to je samo na prvi pogled, jer nije precizirano koja je verovatnoća izvlačenja konkretnog prirodnog broja $n \in \mathbb{N}$.

Ovakva i slična pitanja su razvile aksiomatsku Teoriju verovatnoća, koja danas predstavlja veliki deo savremene matematike. Od interesa je bilo naći asimptotsko ponašanje verovatnoće q_n kada n neograničeno raste jer se tada vidi veza ovog problema sa Rimanovom Zeta funkcijom. Ako bi postojao $\lim_{n\to\infty} q_n$ to ne bi značilo da je ta vrednost verovatnoća da nasumičnim biranjem dva prirodna broja iz skupa prirodnih brojeva, izaberemo uzajamno proste brojeve. U istoriji matematike, često su problemi ovog tipa rešavani na pomenuti način što je u kontradikciji sa aksiomatikom Teorije verovatnoća.

Literatura

[1] Radoslav Dimitrijević, *Analiza realnih funkcija više promenljivih*, Niš, 2010.

[2] Snežana Živković Zlatanović, Marko Điki ć, *Matematička analiza I*, Niš, 2014.

[3] Svetlana Janković, *Da li se može odrediti verovatnoća slučajnog izbora parnog broja iz skupa prirodnih brojeva?*, Nastava matematike, Društvo matematičara Srbije, XLV, 1-2, 9-16, 2000.